TENGSIZLIKLARNI ISBOTLASHNING XUSUSIY HOLLARI

***Kenjayev Sharof Shermuxamatovich*,**
***Qaxxarov Akmal Abdug'ufurovich*,**
Abduraxmonov Abror Akramovich
Shahrisabz "Temurbeklar maktabi" harbiy-akademik litseyi matematika fani o'qituvchilari

Annotatsiya: *Maqolada matematika fanidagi tengsizliklarni isboti, ularni o'quvchilar tomonidan fanni o'rganishdagi o'rni, yangi bilimlarni o'zlashtirish va amaliyotga qo'llashdagi ahamiyati haqida so'z boradi.*

Аннотация: *В статье говорится о доказательстве неравенств в математике, их роли в изучении наук учащимися, их значении в получении новых знаний и применении их на практике.*

Abstract: *The article deals with the proof of inequalities in mathematics, their role in the study of science by students, their importance in obtaining new knowledge and applying them in practice.*

Tayanch so'zalar: *Algebraik tengsizlik, sodda tengsizlik, isbot, ayniy shakl.*

Akademik litsey o'quvchilari o'rtasida o'tkaziladigan an'anaviy ichki, tuman(shahar), viloyat, Respublika va xalqaro matematika fan olimpiadalari va ularda foydalaniladigan misollarga nazar tashlasak, ularda albatta tengsizliklar va ularni isbotlashga doir misollar uchraydi. Shuni tan olishimiz lozimki, ba'zan bunday tengsizliklarni isbotlashda o'quvchilar xatoliklarga yo'l qo'yishadi.

Yuqorida aytilgan fikrlarni e'tiborga olib, algebraik tengsizliklarni isbotlashda foydalaniladigan asosiy usullar bo'yicha ba'zi bir tushunchalarni keltiramiz va bu usullarning ba'zilaridan foydalanib bir nechta misollarni ko'rib chiqamiz.

Tengsizliklarni isbotlashning ko‘pgina turli-tuman usullari mavjud. Ularni isbotlashda tez uchrab turadigan usullarni keltiramiz:

1-usul. Tengsizlikning chap va o‘ng tomonlari orasidagi ayirma qaraladi. Uning ishorasi aniqlanadi va bu ishoraga ko‘ra qaralayotgan tengsizlikning to‘g‘ri yoki to‘g‘ri emasligi bo‘yicha xulosa chiqariladi.

2-usul. Tengsizlikning asosiy xossalaridan va ba’zi eng sodda tengsizliklardan, masalan, ikkita musbat sonning o‘rta arifmetik qiymati ularning o‘rta geometrik qiymatidan kichik emasligi yoki ikkita musbat o‘zaro teskari sonlarning yig‘indisi ikkidan kichik emasligidan foydalanib, berilgan tengsizlik to‘g‘riligi ko‘rinib turgan tengsizlikka keltiriladi.

3-usul. Ayniy shakl almashtirishlar yo‘li bilan ayoniy tengsizlikdan berilgan tengsizlikka yoki aksincha, berilgan tengsizlikdan ayoniy tengsizlikka kelinadi.

4-usul. Tengsizlikni kuchaytirish yo‘lidan foydalaniladi.

5-usul. Matematik induksiya metodidan foydalaniladi.

6-usul. Avval isbot qilingan tengsizliklardan foydalaniladi.

1-misol. $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ bo‘lsa, $(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$ tengsizlikni isbotlang.

Isbot. $(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1 =$

$= 3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) \geq 3+2+2+2 = 9.$

Bu yerda $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$ tengsizlikdan foydalanildi. Tengsizlik isbotlandi.

2-misol. $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ sonlar uchun $\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{a^2+c^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2} \geq \frac{3}{2}$ tengsizlik o‘rinli bo‘lishini isbotlang.

Isbot. Bu tengsizlikni isbotlash uchun avval $x = a^2+b^2$, $y = b^2+c^2$, $z = a^2+c^2$ yangi o‘zgaruvchilarni kiritamiz va ular orqali a^2, b^2, c^2 larni ifodalaymiz:

$$a^2 = \frac{x+z-y}{2}, b^2 = \frac{x+y-z}{2}, c^2 = \frac{y+z-x}{2}.$$

U holda $\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{a^2+c^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}=\frac{x+z-y}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}+\frac{y+z-x}{2x}=$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{z}{y}-1+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}-1+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}-1\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)-3\right]\geq\frac{1}{2}(2+2+2-3)=\frac{3}{2}.$$

Tengsizlik isbotlandi.

3-misol. *1-usul.* $n\geq 2$ son uchun $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{n-1}{n}$ tengsizlikni isbotlang.

Isbot. Matematik induksiya metodidan foydalanamiz: $n=2$ da tengsizlik o‘rinli bo‘ladi: $\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$. Tengsizlikni biror natural $n=k$ sonda o‘rinli deb faraz qilamiz: $S(k)=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<\frac{k-1}{k}$ bo‘lsin. Tengsizlikni $n=k+1$ da ham o‘rinli ekanligini isbotlaymiz:

$$S(k+1)=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}=S(k)+\frac{1}{(k+1)^2}<$$

$$<\frac{k-1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{(k-1)(k+1)^2+k}{k(k+1)^2}=\frac{(k^2-1)(k+1)+k}{k(k+1)^2}=$$

$$=\frac{k^3+k^2-k-1+k}{k(k+1)^2}=\frac{k^3+k^2-1}{k(k+1)^2}<\frac{k^3+k^2}{k(k+1)^2}=\frac{k^2(k+1)}{k(k+1)^2}=$$

$$=\frac{k}{k+1}\Rightarrow\frac{n-1}{n}.$$

Demak, tengsizlik istalgan $n\geq 2$ da o‘rinli. Tengsizlik isbotlandi.

2-usul. $\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1\cdot 2}$, $\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2\cdot 3}$, $\frac{1}{4^2}<\frac{1}{3\cdot 4}$, …, $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{(n-1)\cdot n}$ ushbu tengsizliklar o‘rinli bo‘lganligi uchun ularni tengsizliklarni qo‘shish qoidasiga asosan yig‘indisini topamiz:

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n}.$$

Tengsizlik isbotlandi.

4-misol. Ixtiyoriy haqiqiy a son uchun $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \geq 2$ tengsizlik bajarilishini isbotlang.

Isbot. $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{a^2+1+1}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{a^2+1}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{a^2+1} + \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$. Ikkita musbat o‘zaro teskari sonlar yig‘indisining xossasiga ko‘ra, $\sqrt{a^2+1} + \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \geq 2$. Demak, $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \geq 2$. Tengsizlik isbotlandi.

5-misol. $\sqrt{8} + \sqrt{17} < \sqrt{10} + \sqrt{15}$ ekanligini isbotlang.

Isbot. Tengsizlikni har ikkala tarafini alohida-alohida kvadratga ko‘taramiz: $\left(\sqrt{8} + \sqrt{17}\right)^2 = 8 + 2 \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{17} + 17 = 25 + 2 \cdot \sqrt{136}$,

$\left(\sqrt{10} + \sqrt{15}\right)^2 = 10 + 2 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{15} + 15 = 25 + 2\sqrt{150}, \sqrt{136} < \sqrt{156}$ tengsizlik bajarilgani uchun $\sqrt{8} + \sqrt{17} < \sqrt{10} + \sqrt{15}$ o‘rinli bo‘ladi. Tengsizlik isbotlandi.

Tengsizliklar yordamida o‘quvchilar akademik litsey o‘quvchilari o‘rtasida o‘tkaziladigan an’anaviy ichki, tuman(shahar), viloyat, Respublika va xalqaro matematika fan olimpiada savollarini qiyinchiliksiz isbotini mustaqil bajarishlari mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. И.С.Петраков «Математика тўгараклари». Тошкент, “Ўқитувчи” 1991.
2. S.Alixonov «Matematika o‘qitish metodikasi», Toshkent, 1992.