Задача Коши для уравнения колебания балки

Одинаев Рашид Рахимович

Аннотация: *В данной статье рассматриваются задача Коши для уравнения колебания балки, которая является значимым объектом в инженерных и научных исследованиях. В этом статье исследуется задача о колебаниях бесконечной балки в произвольный момент времени $t > 0$ после начального возмущения (при $t = 0$).*

.***Ключевые слова:*** *задача Коши, свободные колебания, вынужденные колебания, методы анализа, результаты, обсуждение, заключение, предложения.*

Многочисленные задачи о колебаниях стержней, балок и пластин, имеющие важные приложения в строительной механике, приводят к уравнению в частных производных четвертого порядка

$$Lu \equiv u_{tt} + \alpha^2 u_{xxxx} = 0, \qquad (1)$$

$\alpha = EJ/(\varrho S)$ где ϱ - линейная плотность однородной балки, S — площадь поперечного сечения, E — модуль Юнга материала, J — момент инерции поперечного сечения относительно его Горизонтальная ось. Уравнение (1) называется уравнением колебаний балки.

Теория колебаний стержней, балок и пластин (даже в ее упрощенном варианте без учета маловажных характеристик) сложнее теории колебаний идеально упругих струн, в частности потому, что при решении волнового уравнения $u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} = 0$ представляют собой суммы двух бегущих волн, распространяющихся без изменения формы в противоположных направлениях со скоростью а (которая является постоянной в волновом уравнении), это не так для уравнения (1), где постоянная α не может трактоваться как какая-либо скорость, скорость распространения зависит от длины волны.

В настоящей работе исследуется задача о колебаниях бесконечной балки в произвольный момент времени $t > 0$ после начального возмущения (при $t = 0$).

Рассмотрим уравнение (1) в полуплоскости

$$Q = \{(x,t) : t > 0, x \in R\}.$$

Начальная задача (задача Коши). Найдите функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям

$$u(x,t) \in C_{x,t}^{4,2} Q \cap C_t^1 (Q \cup \{t = 0\}) \cap C(\bar{Q}) \qquad (2)$$

$$Lu(x,t) \equiv 0, \qquad (x,t) \in Q, \qquad (3)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in R, \qquad (4)$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — заданные достаточно гладкие функции.

Переходим к построению решение задачи (2)–(4) в явном виде и доказываем его существование.

Согласно классификации дифференциальных уравнений высших порядков уравнение (1) является уравнением параболического типа на всей плоскости переменных (x,t), а линии $t = const$ являются его характеристиками. Решение задачи (2)–(4) в полуплоскости Q построим методом Фурье по аналогии с решением задачи о распространении тепла в бесконечном пучке, т. е. задачи Коши для уравнения теплопроводности.

Сначала найдем частные решения уравнения. (1) в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t). \qquad (5)$$

Подставим выражение (5) в уравнение (1), разделим переменные и получим

$$X^{IV}(x) + \mu X(x) = 0, \ x \in R, \qquad (6)$$

$$T''(t) - a^2 \mu T(t) = 0, \quad t > 0. \qquad (7)$$

Далее, мы принимаем $\mu = -\lambda^4$ в уравнениях. (6) и (7) и построить их общие решения

$$X(x) = \alpha_3\, ch(\lambda x) + \alpha_4\, sh(\lambda x) + \alpha_1 \cos(\lambda x) + \alpha_2 \sin(\lambda x), \qquad (8)$$

$$T(t) = \beta_1 cos(\alpha\lambda^2 t) + \beta_2 sin(\alpha\lambda^2 t), \quad (9)$$

где α_i и β_j — произвольные константы. Параметр λ в формулах (8) и (9) остается совершенно произвольным, поскольку отсутствуют граничные условия.

Используем соотношения (8) и (9) для построения частных решений (5) вида

$$u_\lambda^{(1)}(x,t) = \cos(\alpha\lambda^2 t)\,[a(\lambda)\cos(\lambda x) + b(\lambda)\sin(\lambda x)], \quad (10)$$

$$u_\lambda^{(2)}(x,t) = \frac{1}{\alpha\lambda^2}\sin(\alpha\lambda^2 t)\,[a(\lambda)\cos(\lambda x) + b(\lambda)\sin(\lambda x)] \quad (11)$$

с произвольными функциями $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$.

Интегрирование тождества (10) по параметру λ дает решение

$$u_1(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\alpha\lambda^2 t)\,[a(\lambda)\cos(\lambda x) + b(\lambda)\sin(\lambda x)]\,d\lambda$$

(12)

уравнения (1) при условии, что этот несобственный интеграл сходится равномерно и может быть продифференцирован под знаком интеграла два раза по t и четыре раза по x.

Возьмем функции $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ такие, что функция $u(x,t) = u_1(x,t)$ удовлетворяет первому начальному условию в (4). Функция (12) удовлетворяет этому условию, если

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [a(\lambda)\cos(\lambda x) + b(\lambda)\sin(\lambda x)]\,d\lambda$$

(13)

Интеграл в правой части (13) совпадает с интегралом Фурье от $\varphi(x)$, если

$$a(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\cos(\lambda\xi)d\xi \quad \text{и} \quad b(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) sin(\lambda\xi)d\xi \quad (14)$$

Подставим выражение (14) в соотношение (12) и получим

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\alpha\lambda^2 t)\,d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\cos(\lambda(\xi - x))d\xi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\alpha\lambda^2 t)\, d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\cos(\lambda(\xi - x))\mathrm{d}\xi$$

$$u_1(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\mathrm{d}\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\alpha\lambda^2 t)\cos(\lambda(\xi - x))\, d\lambda \qquad (15)$$

Внутренний интеграл в правой части (15) можно вычислить по формуле

$$\int_0^{+\infty} \cos(a^2 x)\cos(bx)\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left(cos\frac{b^2}{4a} + sin\frac{b^2}{4a}\right)$$

где a $>$ 0 и b — константы; тогда мы получаем

$$\int_0^{+\infty} \cos(\alpha\lambda^2 t)\cos(\lambda(\xi - x))\, d\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2at}}\left(cos\frac{(\xi - x)^2}{4at} + sin\frac{(\xi - x)^2}{4at}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{at}}\, sin\left[\frac{(\xi - x)^2}{4at} + \frac{\pi}{4}\right]$$

Заменим внутренний интеграл в (15) полученным выражением и получим

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) sin\left[\frac{(\xi - x)^2}{4at} + \frac{\pi}{4}\right]\mathrm{d}\xi \qquad (16)$$

теперь делаем замену переменных $\frac{\xi - x}{2\sqrt{at}} = \eta$ в (16) и получаем

$$u_1(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\xi + 2\eta\sqrt{at}\right) sin\left[\eta^2 + \frac{\pi}{4}\right]\mathrm{d}\eta \qquad (17)$$

Если функция φ (ξ) абсолютно интегрируема на $(-\infty, +\infty)$, то несобственный интеграл (17) сходится равномерно при $t \geq 0$ и $x \in R$. Тогда переходим к пределу при $t \to 0 + 0$ в представлении (17) и получаем

$$\lim_{t \to 0+0} u_1(x,t) = \varphi(x) \qquad (18)$$

при условии, что

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} sin\left[\eta^2 + \frac{\pi}{4}\right] d\eta = 1 \qquad (19)$$

Несобственный интеграл (19) можно вычислить по формулам

$$\int_0^{+\infty} \begin{Bmatrix} \sin(ax^2 + bx) \\ \cos(ax^2 + bx) \end{Bmatrix} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\cos\left(\frac{b^2}{4a} \mp sin\frac{b^2}{4a}\right), a > 0\,, \qquad (20)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \begin{Bmatrix} \sin\,(ax^2+bx+c) \\ \cos\,(ax^2+bx+c) \end{Bmatrix} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \begin{Bmatrix} \sin d \\ \cos d \end{Bmatrix}, \qquad (21)$$

где a, b и c — константы, $d = \frac{\pi}{4} + \frac{ac-b^2}{4a}$ и a > 0; к сожалению, эти формулы неверны. В связи с этим вычислим интегралы в левой части (20) и (21). Во-первых, мы используем неопределенный интеграл (1.5.53.9) из [2.41, с. 240] и обратите внимание, что

$$\int \begin{Bmatrix} \sin\,(ax^2+bx+c) \\ \cos\,(ax^2+bx+c) \end{Bmatrix} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \left[\left(\frac{2ax+b}{2\sqrt{a}}\right)^2\right] cos\tilde{d} \pm$$

$$C\left[\left(\frac{2ax+b}{2\sqrt{a}}\right)^2\right] \sin\tilde{d} \quad (22)$$

где $\tilde{d} = \frac{4ac-b^2}{4a}, a > 0$ и функции

$$S(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^z \frac{\sin t}{\bar{t}}\,dt \quad \text{и} \quad C(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^z \frac{\cos t}{\bar{t}}\,dt$$

являются интегралами Френеля. Тождество (22) можно доказать прямым дифференцированием. Теперь учтем формулы (22) и вычислим интегралы

$$\int_0^{+\infty} \begin{Bmatrix} \sin\,(ax^2+bx+c) \\ \cos\,(ax^2+bx+c) \end{Bmatrix} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \left\{\frac{1}{2}\left(cos\tilde{d} + \sin\tilde{d}\right)\right\} - S\left(\frac{b^2}{4a}\right) cos\tilde{d} \mp$$

$$C\left(\frac{b^2}{4a}\right) \sin\tilde{d} \qquad (23)$$

Заметим, что формула (23) при $c = 0$ не совпадает с (20). Воспользуемся формулой (23) и вычислим интегралы в левой части (21)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\,(ax^2+bx+c)\,dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \sin\,(ax^2+bx+c)\,dx + \int_0^{+\infty} \sin\,(ax^2+bx+c)\,dx =$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left\{\frac{1}{2}\left(cos\tilde{d}+\sin\tilde{d}\right)-S\left(\frac{b^2}{4a}\right)cos\tilde{d}-C\left(\frac{b^2}{4a}\right)\sin\tilde{d}\ \right\}=$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\left\{\left(\sin(\tilde{d}+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left[S\left(\frac{b^2}{4a}\right)cos\tilde{d}+C\left(\frac{b^2}{4a}\right)\sin\tilde{d}\ \right]\right\}\quad(24)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\ (ax^2+bx+c)\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\left\{\left(\cos(\tilde{d}+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left[S\left(\frac{b^2}{4a}\right)cos\tilde{d}+C\left(\frac{b^2}{4a}\right)\sin\tilde{d}\ \right]\right\}\quad(25)$$

Отметим, что формулы (24) и (25) также отличаются от (21).

Теперь воспользуемся формулой (24) для $a=1, b=0$ и $c=\frac{\pi}{4}$ и найдем, что выполняется соотношение (19).

Покажем, что

$$\lim_{t\to 0+0} u_{1t}(x,t)=0,\ \ x\in R$$

Если вычислить производную по переменной t в (15), а затем устремить t к нулю, то внутренний интеграл в правой части расходится, хотя может показаться, что он стремится к нулю при $t\to 0$ Таким образом, находим производную по формуле (17)

$$u_{1t}(x,t)=\sqrt{\frac{a}{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi'\left(x+2\eta\sqrt{at}\right)\eta\sin\left(\eta^2+\frac{\pi}{4}\right)d\eta=$$

$$\sqrt{\frac{a}{\pi t}}\left[-\frac{1}{2}\cos\left(\eta^2+\frac{\pi}{4}\right)\varphi'\left(x+2\eta\sqrt{at}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\sqrt{at}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi'\left(x+2\eta\sqrt{at}\right)\eta\cos\left(\eta^2+\frac{\pi}{4}\right)d\eta\right]\qquad(26)$$

Если $\varphi'(\pm)\ =\ 0$, то отсюда следует, что

$$u_{1t}(x,t)=\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi'\left(x+2\eta\sqrt{at}\right)\eta\cos\left(\eta^2+\frac{\pi}{4}\right)d\eta\qquad(27)$$

Если функция $\varphi''(x)$ абсолютно интегрируема на (− ,+), то интеграл (27) сходится равномерно при всех $x\in R$ и $t\to 0$. Перейдем к пределу при $t\to 0+0$ в представлении (27) и получаем

$$\lim_{t\to 0+0} u_{1t}(x,t) = \frac{a\varphi''(\mathrm{x})}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\left(\eta^2+\frac{\pi}{4}\right)d\eta\ ,$$

так как несобственный интеграл в этом соотношении равен нулю в силу формулы (25) при $a = 1, b = 0$ и $c = \pi/4$.

Лемма 2.1. Функция

$G_1(x,t,\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} sin\left[\frac{(\xi-x)^2}{4at}+\frac{\pi}{4}\right]$ (28)

имеет следующие свойства.

(а) $G_1(x,t,\xi) \in C^\infty(\mathrm{Q})$.

(б) Это решение уравнения (1) в области Q.

(с) Оно стремится к бесконечности при $t \to 0+0$.

(г)$\int_{-\infty}^{+\infty} G_1(x,t,\xi)\, \mathrm{d}\xi = 1$

Доказательство этих свойств осуществляется прямой проверкой на основе соотношения (28).

По аналогии с уравнением теплопроводности функцию (28) можно назвать первым фундаментальным решением уравнения колебаний балки.

Из предыдущего рассуждения следует, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.2. Если функция $\varphi(x)$ принадлежит пространству $C^2(R)$ и функции $x^4\varphi(x)$ и $\varphi''(x)$ абсолютно интегрируемы на $(-,+)$, то функция $u_1(x,t)$, определяемая формулой (17), удовлетворяет условиям (2), (3), (18), (26) и ограничена в полуплоскости Q.

Далее строим вторую часть решения задачи Коши

$u_2(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\alpha\lambda^2} sin(\alpha\lambda^2 t)[a(\lambda)\, cos(\lambda x)\ +\ b(\lambda)\, sin(\lambda x)]d\lambda$

(29)

по выбору (11) доступность производственной от умножения

$u_{2t}(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} cos\,(\alpha\lambda^2 t)[a(\lambda) cos(\lambda x) +\ b(\lambda) sin(\lambda x)]d\lambda,$ (30)

что совпадает с решением (12). Потребуем, чтобы функция (30) удовлетворяла второму условию в (4), и действуем аналогично предыдущему, находя произвольные функции $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ по формулам (14) с функцией $\varphi(x)$ заменяется на $\psi(x)$. Тогда функция (29) принимает вид

$$u_2(x,t) = \frac{1}{2\pi a}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\xi)d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\lambda^2}sin\,(\alpha\lambda^2 t)\cos\big(\lambda(\xi-x)\big)\,d\lambda =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\xi)G_2(x,t\,,\xi)\mathrm{d}\xi, \qquad (31)$$

где

$$G_2(x,t,\xi) = \frac{1}{\pi a}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\lambda^2}\sin(a\lambda^2 t)\cos(\,\lambda(\xi-x))d\lambda. \qquad (32)$$

Воспользуемся уточненной формулой (см. [2.41, с. 431])

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\sin(a^2x)\cos(bx)\,dx = \sqrt{\pi a}\sin\left(\frac{b^2}{4a}+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{b\pi}{2}\left[S\left(\frac{b^2}{4a}\right)-\right.$$

$$\left.C\left(\frac{b^2}{4a}\right)\right], \quad a>0 \quad (33)$$

для вычисления интеграла (32),

$$G_2(x,t,\xi) = \sqrt{\frac{1}{\pi a}}sin\left[\left(\frac{\xi-x}{2\sqrt{at}}\right)^2+\frac{\pi}{4}\right]+\frac{\xi-x}{2a}\left\{S\left[\left(\frac{\xi-x}{2\sqrt{at}}\right)^2\right]-C\left[\left(\frac{\xi-x}{2\sqrt{at}}\right)^2\right]\right\}$$

(34)

Лемма 3. Функция $G_2(x,t,\xi)$ обладает следующими свойствами.

(a) $G_2(x,t,\xi) \in C^\infty(Q)$.

(b) *Это решение уравнения. (1) в области Q.*

(c) $\lim\limits_{t\to 0+0} G_2(x,t,\xi) = 0,$

(d) $\frac{\partial G_2(x,t,\xi)}{\partial t} = G_1(x,t,\xi).$

(e) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial G_2(x,t,\xi)}{\partial t}d\xi = 1.$

Функцию $G_2(x,t,\xi)$ будем называть вторым фундаментальным решением уравнения колебаний балки.

Сделаем замену переменных $\frac{\xi-x}{2\sqrt{at}} = \eta$ в интеграле (31) и получим

$$u_2(x,t) = 2\sqrt{at}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi\,(x+2\sqrt{at}\eta)G_2\big(x,t,x+2\sqrt{at}\eta\,\big)\mathrm{d}\eta$$

(35)

где

$$G_2\left(x,t,x+2\sqrt{at}\eta\right)\sqrt{\frac{t}{\pi a}}\sin\left(\eta^2+\frac{\pi}{4}\right)+\eta\sqrt{\frac{t}{a}}[S(\eta^2-C(\eta^2)]$$

Из представления (35) следует, что если функция $\psi(\xi)$ абсолютно интегрируема на R, то

$$\lim_{t\to 0+0} u_2(x,t) = 0, x \in \mathrm{R} \qquad (36)$$

поскольку интегралы Френеля $S(\eta^2)$ и $C(\eta^2)$ конечны для любого $\eta \in R$ и удовлетворяют условию $S(+\infty) = C(+\infty) = 1/2$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ЛИТЕРАТУР

1. Caruntu D.I. On bending vibrations of some kinds of beams of variable cross-section using orthogonal polynomials. Revue Roumaine des Sciences Techniques. Serie de Mecanique Appliquee. 1996. V. 41, № 3-4. pp. 265-272.
2. Conway H.D., Dubil J.F. Vibration frequencies of truncated wedge and cone beam. Journal of Applied Mechanics. 1965. V. 32, № 4. pp. 932-935.
3. Goel R.P. Transverse vibration of tapered beams. Journal of Sound and Vibration. 1976. V. 47, № 1. pp. 1-7.
4. Sanger D.J. Transverse vibration of a class of non-uniform beams. Journal of Mechanical Engineering Science. 1968. V. 16. pp. 111-120.
5. Mabie J.J., Rogers C.B. Traverse vibrations of tapered cantilever beams with end support. Journal of Acoustical Society of America. 1968. V. 44. pp. 1739-1741.
6. Conway H.D., Becker E.C.H., Dubil J.F. Vibration frequencies of tapered bars and circular plates. Journal of Applied Mechanics. 1964. T. June. pp. 329-331.
7. Rosa M.A. De, Auciello N.M. Free vibrations of tapered beams with flexible ends. Computers & Structures. 1996. V. 60, № 2. pp. 197-202.
8. Craver Jr. W.L., Jampala P. Transverse vibrations of a linearly tapered cantilever beam with constraining springs. Journal of Sound and Vibration. 1993. V. 166, № 3. pp. 521-529.

9. Cranch E.T., Adler A. Bending vibrations of variable section beams. American Society of Mechanical Engineers. 1956. V. 23, № 1. pp. 103-108.
10. Auciello N.M., Ercolano A. Exact solution for the transverse vibration of a beam a part of which is a taper beam and other part is a uniform beam. International Journal of Solids and Structures. 1997. pp. 2115-2129.
11. Wang H.C. Generalized hypergeometric function solutions on the transverse vibrations of a class of non-uniform beams. Journal of Applied Mechanics. 1967. V. 34E. pp. 702-708.