Начально-краевые задачи для уравнения колебаний балки

Одинаев Рашид Рахимович

Аннотация: *В данной статье рассматриваются Начально-краевые задачи для уравнения колебаний балки. В этом статье исследуются начальные задачи с различными краевыми условиями на концах для уравнения колебаний балки, учитывающее вращательное движение балки при изгибе. Установлено энергетическое неравенство, из которого следует единственность решения четырех поставлены начально-краевые задачи. В случае шарнирных концов теоремы существования и устойчивость решения задачи в классах регулярных и обобщенных решений доказаны.*

Ключевые слова: *Начально-краевые задачи, свободные колебания, вынужденные колебания, методы анализа, результаты, обсуждение, заключение, предложения.*

Изгибные поперечные колебания однородных тонких упругих стержней и балок с учетом их вращательного движения при изгибе описываются уравнением в частных производных четвертого порядка

$$Lu \equiv u_{tt} + a^2u_{xxxx} - \beta^2u_{xxtt} - \gamma^2u_{xx} = F(x,t), \qquad (1)$$

где $u(x,t)$— перемещение точек балки в момент времени t, $a^2 = \frac{EJ}{pS}, \beta^2 = r^2, \gamma^2 = T_0/p$, $F(x,t)$ постоянная внешняя сила, приходящаяся на единицу балки длина, E — модуль упругости материала, ρ — погонная плотность балки, S — площадь сечения балки, $J = r^2S$— момент инерции сечения относительно ее горизонтальной оси, r — радиус инерции относительно прямой линия, проходящая через ось и перпендикулярная плоскости изгиба, T_0— растягивающая сила, приложенная к концам балки.

Для определения колебаний (перемещений) $u(x,t)$, точек балки длины l необходимо задать граничные условия в концевых точках $x = 0$ и $x = l$. Вид граничных условий зависит от способа фиксации соответствующей конечной точки. Если оба конца шарнирно закреплены, т. е. могут свободно вращаться вокруг точки фиксации, то граничные условия имеют вид

$$u(0,t) = u_{xx}(0,t) = u(l,t) = u_{xx}(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T \qquad (2)$$

Для балки с защемленными концами выполняются условия

$$u(0,t) = u_x(0,t) = u(l,t) = u_x(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T \qquad (3)$$

Если оба конца свободны, то выполняются следующие граничные условия:

$$u_{xx}(0,t) = 0, \quad \beta^2 u_{ttx}(0,t) - a^2 u_{xxx}(0,t) = 0, \qquad (4)$$

$$u_{xx}(l,t) = 0, \quad \beta^2 u_{ttx}(l,t) - a^2 u_{xxx}(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T$$

Если один конец защемлен, а другой свободен, то согласно (3) и (4) выполняются условия

$$u(0,t) = u_x(0,t) = 0, \qquad u_{xx}(l,t) = 0$$

$$\beta^2 u_{ttx}(l,t) - a^2 u_{xxx}(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T \qquad (5)$$

Возможны и многие другие случаи постановки граничных условий.

Начальные условия такие же, как и в случае уравнения колебаний струны,

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x), \qquad u_t(x,t)|_{t=0} = \psi(\mathrm{x}), \quad 0 \le x \le l. \qquad (6)$$

Мы рассматриваем уравнение. (1) в области $D = \{(x,t): 0 < x < 1,\ 0 < t < T\}$ где l и T — заданные положительные числа, и формулируют следующие задачи.

Начально-краевые задачи. Найти функцию $u(x,t)$ определенную в области D, обладающую свойствами

$$u(x,t) \in C^{4,2}_{x,t}(\overline{D}), \qquad (7)$$

$$Lu(x,t) \equiv F(x,t), \qquad (x,t) \in D, \qquad (8)$$

и удовлетворяющие начальным условиям (6) и одному из граничных условий (2)–(5), где $\varphi_n(x)$,$\psi_n(x)$ $F_n(x,t)$ — заданные достаточно гладкие функции.

Теорема 1. Для каждого $t \in [0,T]$ решения задач 1 и 2 удовлетворяют неравенству

$$\int_0^l (u_t^2 + \alpha^2 u_{xx}^2 + \gamma^2 u_x^2 + \beta^2 u_{tx}^2) dx$$

$$\leq e^T \left[\int_0^l (\psi^2(x) + a^2 \varphi''^2(x) + \gamma^2 \varphi'^2(x) + \beta^2 \varphi'^2(x)\, dx + \iint_D \; F^2(x,t)\, dx\, dt \right] \quad (9)$$

а решения задач 3 и 4 удовлетворяют неравенству (9) при γ = 0.

Обратите внимание, что интеграл

$$E_0(t) = \frac{1}{2}\int_0^l (pSu_t^2 + EJu_{xx}^2 + TSu_x^2 + r^2\, pu_{tx}^2)\, dx$$

$$= pS\frac{1}{2}\int_0^l (u_t^2 + a^2 u_{xx}^2 + \gamma^2 u_x^2 + \beta^2 u_{tx}^2)\, dx = pSE(t)$$

– закон сохранения энергии свободных колебаний однородной балки при нулевых граничных условиях (2)–(5).

Действительно, кинетическая энергия движущейся балки складывается из поступательного движения элементов dx, параллельных перемещению $u(x,t)$ и из вращения этих же элементов вокруг осей, проходящих через центры инерции этих элементов перпендикулярно плоскости колебаний. Первая часть выражается интегралом

$$\frac{1}{2}\int_0^l pSu_t^2\, (x,t)\, dx$$

Чтобы получить выражение для второй части, обратите внимание, что угловое смещение элемента dx равно u_x; следовательно, его угловая скорость равна u_{xt}. Квадрат этой величины следует умножить на половину времени инерции элемента dx, т. е. на $\left(\frac{1}{2}\right)\rho Sr^2$ dx, а затем проинтегрировать по интервалу $[0, l]$. Следовательно, кинетическая энергия колебаний балки в момент времени t может быть найдена по формуле

$$K(t)=\frac{1}{2}\int_0^l (pSu_t^2+pSr^2u_{xt}^2)\,dx$$

Если поперечные колебания балки подвержены продольному растяжению T_0, то потенциальная энергия состоит из двух частей. Первая зависит от жесткости, а вторая зависит от сопротивления растяжению и аналогична потенциальной энергии струны; т. е. равно

$$\frac{1}{2}\int_0^l ST_0u_x^2\,dx$$

первая часть определяется интегралом

$$\frac{1}{2}\int_0^l ESu_{xx}^2\,dx.$$

Отсюда потенциальную энергию колебаний балки в момент времени t можно определить по формуле

$$\Pi(t)=\frac{1}{2}\int_0^l (ESu_{xx}^2+ST_0u_x^2)\,dx.$$

Следовательно, интеграл $E_0(t)=K(t)+\Pi(t)$ представляет собой полную энергию свободных поперечных колебаний балки.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим тождество

$$u_tLu=\frac{1}{2}(u_t^2+a^2u_{xx}^2+\gamma^2u_x^2+\beta^2u_{xt}^2)'_t+(a^2u_tu_{xxx}-a^2u_{xt}u_{xx}-\gamma^2u_xu_t-\beta^2u_tu_{xtt})'_x.$$

Интегрируя это тождество по области $D_\tau=D\cap\{t<\tau\}$, где $0<\tau\le T$, получаем

$$E(\tau)+E(0)+J_1+J_2=\iint_{D\tau}F(x,t)u_t\,dx\,dt; \qquad (10)$$

Здесь

$$J_1=\int_0^\tau [a^2(u_tu_{xxx}-u_{xt}u_{xx})-\gamma^2u_xu_t-\beta^2u_tu_{xtt}]|_{x=l}\,dx,$$

$$J_2 = -\int_0^{\tau} [a^2(u_t u_{xxx} - u_{xt} u_{xx}) - \gamma^2 u_x u_t - \beta^2 u_t u_{xtt}]|_{x=0}\, dx.$$

Пусть выполнены граничные условия (2); т. е. $u = u_{xx} = 0$ при $x = 0$ и $x = l$. Тогда $u_t = u_{xxt} = 0$ при $x = 0$ и $x = l$; поэтому интегралы J_1 и J_2 равны нулю.

Если выполнены граничные условия (3), т. е. $u = u_x = 0$ при $x = 0$ и $x = l$. то $u_t = u_{xt} = 0$ при $x = 0$ и $x = l$. Тогда интегралы J_1 и J_2 также равны нулю.

Пусть выполнены условия (4); т. е. $u_{xx} = 0$ и $\beta^2 u_{ttx} - a^2 u_{xxx} = 0$ при $x = 0$ и $x = l$. Тогда $u_t = u_{xxt} = 0$ при $x = 0$ и $x = l$. В этом случае имеют место соотношения

$$J_1 = -\gamma^2 \int_0^{\tau} u_x u_t|_{x=l}\, dx, \qquad J_2 = \gamma^2 \int_0^{\tau} u_x u_t|_{x=0}\, dx, \tag{11}$$

и, следовательно, интегралы J_1 и J_2 равны нулю только в случае, когда γ = 0.

Если выполнены граничные условия (5), т. е.$u = u_x = 0$ при $x = 0$ и $u_{xx} = 0$ и $\beta^2 u_{ttx} - a^2 u_{xxx} = 0$ при $x = l$, то $J_2 = 0$, а интеграл J_1 выражается первым соотношение в (11) и, следовательно, обращается в нуль только при γ = 0.

Тогда из соотношения (10) следует, что

$$E(\tau) \le E(0) + \frac{1}{2} \iint\limits_{D\tau} F^2\,(x,t)\, dx\, t + \frac{1}{2} \iint\limits_{D\tau} u_t^2\, dx\, dt$$

$$= A + \frac{1}{2}\int_0^{\tau} dt \int_0^{\tau} u_t^2\, dx \le A + \int_0^{\tau} E(t) dt. \tag{12}$$

Отсюда, получаем неравенство

$$A + \int_0^{\tau} E(t) dt \le A e^t,$$

откуда вместе с неравенством (12) следует оценка (9). Доказательство теоремы завершено.

Следствие 2.1. Пусть правая часть уравнения (1) равно нулю, $F(x,t) \equiv 0$. Если задачи 1 или 2 имеют решение, то для каждого $t \in [0,T]$ выполняется соотношение

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2}\int_0^l [\psi^2(x) + a^2\varphi''^2(x) + \gamma^2\varphi'^2(x) + \beta^2\psi'^2(x)]\, dx, \tag{13}$$

а если задачи 3 или 4 имеют решение, то имеет место соотношение (13) при γ = 0.

Другими словами, соотношение (13) означает, что полная энергия свободных колебаний однородной балки остается постоянной в течение всего процесса колебаний и равна ее начальной энергии.

Справедливость соотношения (13) легко следует из соотношения (2.46).

Следствие 2.2. (теорема единственности). Если существует функция $u(x,t)$, удовлетворяющая условиям (6)–(28) и одному из граничных

условий (22)–(5), то эта функция единственна. В этом случае коэффициент γ = 0 для задач 3 и 4.

Доказательство. Предположим, что существуют две функции $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, удовлетворяющие условиям Следствие 2. Тогда их разность $u_1(x,t) - u_2(x,t) = u(x,t)$, принадлежит классу (7) и удовлетворяет однородному уравнению $Lu \equiv 0$ в D, нулевым начальным условиям $u(x,0) = u_t \equiv 0$ и одно из граничных условий (2)–(5). Для такого решения в силу соотношения (13) имеем

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l (u_t^2 + a^2u_{xx}^2 + \gamma^2u_x^2 + \beta^2u_{xt}^2)\, dx = 0$$

для каждого $t \in [0,T]$. Однако это соотношение возможно только при $u_t \equiv 0$, $u_{xx} \equiv 0$, $u_x \equiv 0$ и $u_{xt} \equiv 0$ в области D. Первые два из этих тождеств означают, что $u(x,t) = a_1x + a_2$, где a_1 и a_2 — произвольные константы. По условию функция $u(x,t)$ удовлетворяет одному из граничные условия (2)–(5) и нулевые начальные условия. Из краевых условий (2), (3) и (5) следует, что $a_1 = a^2 = 0$ Функция $u(x,t) = a^1x + a^2$ удовлетворяет граничным условиям (4) для любых a_1 и a_2. Однако из начального условия следует, что для каждого $x \in [0,l]$ выполняется $u(x,0) = a_1x + a_2 = 0$, что возможно только при $a_1 = a_2 = 0$. Таким образом, $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Разделяя переменные $u(x,t) = X(x)T(t)$ в уравнении (1) при $F(x,t) \equiv 0$ для функции $X(x)$ получаем спектральную задачу

$$X^{(4)}(x) + (a^2 + \lambda\beta^2)X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{14}$$

$$X(0) = X''(0) = 0, \quad X(l) = X''(l) = 0, \tag{15}$$

где $a^2 = \gamma^2/a^2$. Чтобы построить решение этой спектральной задачи, мы запишем характеристическое уравнение для уравнения (14),

$$k^4 - (a^2 + \lambda\beta^2)k^2 + \lambda = 0, \tag{16}$$

который имеет корни $k_1 = \sqrt{t_1}$, $k_2 = -\sqrt{t_1}, k_3 = \sqrt{t_2}$, $k_4 = -\sqrt{t_2}$,

$$t_j = \left(a^2 + \lambda\beta^2 + (-1)^{j+1}\sqrt{(a^2 + \lambda\beta^2)^2 - 4\lambda}\right)/2$$

$$\equiv \left(a^2 + \lambda\beta^2 + (-1)^{j+1}\sqrt{D(\lambda)}\right)/2, \quad j = 1,2$$

Если $\lambda = 0$, то $k_1 = a$, $k_2 = -a$, $k_3 = k_4 = 0$ и общее решение уравнения (14) имеет вид

$$X(x) = C_1e^{a_1x} + C_2e^{-ax} + C_3x + C_4 \tag{17}$$

где $C_i, i = 1,\ldots,4$ — произвольные константы. Удовлетворяя общему решению (17) граничным условиям (15), получаем $X(x) \equiv 0$

Проверим дискриминант $D(\lambda)$ на предмет его знака. Если $(a\beta)^2 > 1$, то $D(\lambda) > 0$ для каждого λ ∈ R. Если $(a\beta)^2 > 1$, то $D(\lambda) > 0$ для всех λ, кроме $\lambda = 1/\beta^4$, где $D(1/\beta^4) = 0$. Если $(a\beta)^2 < 1$,, то D(λ) имеет вид $D(\lambda) = \beta^4(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$, где

$$\lambda_j = (1 + \frac{\left((-1)^{j+1}\sqrt{1-(a\beta)^2}\,\right)^2}{\beta^4}, \quad j = 1,2$$

т. е. $D(\lambda) \geq 0$, если $\lambda \geq \lambda_1$ и $\lambda \leq \lambda_2$, и $D(\lambda) < 0$, если $\lambda_2 < \lambda < \lambda_1$. Тогда при $\lambda < 0$ (в данном случае $D(\lambda) > 0$ для любых $a > 0$ и $\beta > 0$) корни имеют противоположные знаки, $t_1 > 0$ и $t_2 < 0$. Если $\lambda \in (0,\lambda_2] \cup$

$[\lambda_1, +\infty)$, то корни t_1 и t_2 положительны. При $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ корни t_1 и t_2 комплексно сопряжены друг другу.

В случае положительных чисел t_1 и t_2 соответствующие корни характеристического уравнения (16) вещественны, $k_2 < k_4 < 0 < k_3 < k_1$. Тогда общее решение уравнения (14) определяется по формуле

$$X(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + C_3 e^{k_3 x} + C_4 e^{k_4 x}$$

Подставляя это общее решение в граничные условия (15), получаем линейную однородную систему для $C_i, i = 1, \ldots, 4$, с отличным от нуля определителем. Следовательно, все $C_i = 0$; следовательно, $X(x) \equiv 0$ в этом случае.

Теперь рассмотрим случай, когда $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ т. е. тогда числа t_1 и t_2 являются комплексно-сопряженными друг другу,

$$t_j = (a^2 + (-1)^{j+1} \lambda \beta^2 + i\sqrt{|D(\lambda)|})/2 = c + (-1)^{j+1} id, \;\; j = 1,2$$

где

$$c = (a^2 + \lambda \beta^2)/2 \quad \text{и} \quad d = \sqrt{|D(\lambda)|})/2 = \sqrt{4\lambda - (a^2 + \lambda\beta^2)^2/2} = \sqrt{\lambda - c^2}$$

Извлекая квадратный корень из чисел t_1 и t_2, получаем

$$k_{1\;2} = \pm\sqrt{c + id} = \pm(v + i\omega) \;\; и \;\; k_{3\;4} = \pm\sqrt{c - id} = \pm(\vartheta - i\omega)$$

где

$$\vartheta = \sqrt{\frac{\sqrt{c^2 + d^2} + c}{2}} \qquad \omega = \sqrt{\frac{\sqrt{c^2 + d^2} - c}{2}}$$

Тогда общее решение уравнения (14) можно найти по формуле

$$X(x) = C_1 e^{vx} \cos(\omega x) + C_2 e^{vx} \sin(\omega x) + C_3 e^{-vx} \cos(\omega x) + C_4 e^{-vx} \sin(\omega x). \tag{18}$$

Подчиняя общее решение (18) граничным условиям

$X(0) = X''(0) = 0$, из (15) заключаем, что $C_3 = -C_1$ и $C_4 = C_2$. Тогда функция (18) принимает вид

$$X(x) = 2C_1 \sinh(vx) \cos(\omega x) + 2C_2 \cosh(vx) \sin(\omega x).$$

Удовлетворяя этой функции граничным условиям $X(l) = X''(l) = 0$, получаем следующую систему для C_1 и C_2:

$$C_1 \sinh(vl)\cos(\omega l) + C_2 \cosh(vl)\, sin(\omega l) = 0$$

$$C_1[(v^2 - \omega^2) sinh(vl)\cos(\omega l) - 2v\omega cosh \cos(vl)\, sin \cos(\omega l)]$$

$$+C_2[(v^2 - \omega^2)\cosh(vl)\sin(\omega l) + 2v\omega sinh(vl)\cos(\omega l) = 0]$$

Определитель этой системы равен $-2\nu\omega(\sin^2(\omega l) + sinh^2(\nu l))$ и, следовательно, отличен от нуля; следовательно, оно имеет только нулевое решение $C_1 = C_2 = 0$. Поэтому, как и в предыдущем случае, $X(x) \equiv 0$.

Осталось рассмотреть случай, когда $\lambda < 0$. В этом случае $t_1 > 0$ и $t_2 < 0$. Тогда $k_1 = \sqrt{t_1} > 0$, $k_2 = -\sqrt{t_1} < 0$, $k_3 = i\sqrt{|t_2|} = i\delta$ $k_4 = -i\delta$ и общее решение уравнения (14) определяется по формуле

$$X(x) = C_1 e^{k_1 x} + 2e^{k_2 x} + C_3 \cos(\delta x) + C_4 \sin(\delta x) \qquad (19)$$

Тогда, исходя из граничных условий (15), получаем систему

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0,$$

$$k_1^2 + C_2 k_2^2 - \delta^2 C_3 = 0$$

$$C_1 e^{k_1 l} + C_2 e^{k_2 l} + C_3 \cos\delta l + C_4 \sin\delta l = 0,$$

$$C_1 k_1^2 e^{k_1 l} + C_2 k_2^2 e^{k_2 l} - \delta^2 C_3 cos\delta l - \delta^2 C_4 sin\delta l = 0. \qquad (20)$$

Определитель этой системы равен

$$\Delta =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ k_1^2 & k_2^2 & -\delta^2 & 0 \\ e^{k_1 l} & e^{k_2 l} & cos\delta l & sin\delta l \\ k_1^2 e^{k_1 l} & k_2^2 e^{k_2 l} & -\delta^2 cos\delta l & -\delta^2 sin\delta l \end{vmatrix} =$$

$$-sin\delta l \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k_1^2 & k_2^2 & -\delta^2 \\ k_1^2 e^{k_1 l} & k_2^2 e^{k_2 l} & -\delta^2 cos\delta l \end{vmatrix} -$$

$$-\delta^2 sin\delta l \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k_1^2 & k_2^2 & -\delta^2 \\ e^{k_1 l} & e^{k_2 l} & cos\delta l \end{vmatrix}$$

$$= sin\delta l(e^{k_1 l} - e^{k_2 l})[k_1^2 k_2^2 + (k_1^2 + k_2^2)\delta^2 + \delta^4]$$

Отсюда, очевидно, $\Delta = 0$, только если $\sin(\delta l) = 0$, т.е. $\delta l = \sqrt{|t_2|}\, l = \pi k$, $k \in N$. Учитывая значение t_2, находим собственные значения

$$\lambda_k = -\frac{(\mu_k^2 a)^2 + \mu_k^4 1}{1 + (\mu_k \beta)^2}, \quad \mu_k = \frac{\pi k}{l}. \qquad (21)$$

Так как $sin(\delta l) = 0$, то $cos(\delta l) = \pm 1$, и система (21) принимает вид

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0,$$
$$C_1 k_1^2 + C_2 k_2^2 - \delta^2 C_3 = 0,$$
$$C_1 e^{k_1 l} + C_2 e^{k_2 l} \pm C_3 = 0$$
$$C_1 k_1^2 e^{k_1 l} + C_2 k_2^2 e^{k_2 l} \pm \delta^2 C_3 = 0.$$

Из первого уравнения этой системы находим значение $C_3 = -C_1 - C_2$. Подставляя его в остальные уравнения, приходим к системе

$$C_1(k_1^2 + \delta^2) + C_2(k_2^2 + \delta^2) = 0,$$
$$C_1(e^{k_1 l} \mp 1) + C_2(e^{k_2 l} \mp 1) = 0,$$
$$C_1 k_1^2 e^{k_1 l} \mp \delta^2) + C_2 k_2^2 e^{k_2 l} \mp \delta^2) = 0$$

Так как $k_1^2 = k_2^2 = t_1$, то из первого уравнения полученной системы следует соотношение $C_1 + C_2 = 0$; т. е. $C_2 = -C_1$. Тогда из второго уравнения системы следует, что $C_1(e^{k_1 l} - e^{k_2 l}) = 0$. Это соотношение возможно только при $C_1 = 0$. Следовательно, $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, и тогда из (19) при условии $C_4 \neq 0$, находим соответствующую систему собственных функций

$$X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin(\delta x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\sqrt{|t_2| x}\right) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin(\mu_k x), \qquad k \in N \qquad (22)$$

Система функций (22) ортонормирована и полна в $L_2[0, l]$. Введем функции

$$u_k(t) = \int_0^l u(x,t) X_k(x)\, dx, \ k \in N \qquad (23)$$

Дифференцируя тождество (23) дважды по $t \in (0, T)$ и учитывая равенство (1), получаем

$$u_k''(t) = \int_0^l u(x,t) X_k(x)\, dx +$$

$$+\gamma^2 \int_0^l u_{xx} X_k\, dx + a^2 \int_0^l u_{xxxx} X_k(x)\, dx + \beta^2 \int_0^l u_{xxtt} X_k(x)\, dx. \qquad (24)$$

Четырежды интегрируя по частям с учетом граничных условий (2) и (15)

будем иметь

$$\int_0^l u_{xx}X_k(x)dx = -\mu_k^2 u_k(t)$$

$$\int_0^l u_{xxx}X_k(x)dx = -\mu_k^4 u_k(t)$$

$$\int_0^l (u_{tt})_{xx}X_k(x)dx = -\mu_k^2 u_k{}''(t)$$

Подставляя значения этих интегралов в соотношение (25), получаем уравнение

$$u_k''(t) + \frac{\gamma^2\mu_k^2+\alpha^2\mu_k^4}{1+\beta^2\mu_k^2}u_k(t) = \frac{F_k(t)}{1+\beta^2\mu_k^2}$$

или, с учетом соотношений (21), уравнение

$$u_k''(t) - \lambda_k^2\alpha^2 u_k(t) = G_k(t) \tag{26}$$

Здесь $G_k(t)=\frac{F_k(t)}{1+\beta^2\mu_k^2}$ $F_k(t) = \int_0^l F(x,t)X_k(x)\,dx$

(27)

Общее решение уравнения (25) находится по формуле

$$u_k(t) = a_k\cos\left(\alpha\sqrt{|\lambda_k|}t\right) + b_k\sin\left(\alpha\sqrt{|\lambda_k|}t\right) + \frac{\widetilde{F_k}(t)}{(1+\beta^2\mu_k^2)\alpha\sqrt{|\lambda_k|}} \tag{28}$$

где $\widetilde{F_k}(t) = \int_0^t F_k(s)\sin\left(\alpha\sqrt{|\lambda_k|}(t-s)\right)dx$, a_k и b_k произвольные константы. Для определения неизвестных a_k и b_kвоспользуемся начальными условиями (6) и формулой (23),

$$u_k(0) = \int_0^l u(x,0)X_k(x)\,dx = \int_0^l \varphi(x)X_k(x)\,dx = \varphi_k \tag{29}$$

$$u'_k(0) = \int_0^l u_t(x,0)X_k(x)\,dx = \int_0^l \psi(x)X_k(x)\,dx = \psi_k \tag{30}$$

Удовлетворяя функции (27) граничным условиям (28) и (29), заключаем, что

$$a_k = \varphi_k \text{ и } b_k = \frac{\psi_k}{\alpha\sqrt{|\lambda_k|}}$$

Подставив установленные значения a_k и b_k в формулу (27), получим явный вид функций $u_k(t)$:

$$u_k(t)=\varphi_k \cos\left(\alpha\sqrt{|\lambda_k|}t\right)+\frac{\psi_k}{\alpha\sqrt{|\lambda_k|}}\sin\left(\alpha\sqrt{|\lambda_k|}t\right)+\frac{\widetilde{F_k}(t)}{(1+\beta^2\mu_k^2)\alpha\sqrt{|\lambda_k|}} \quad (31)$$

На основании частных решений (30) и (22) решение задачи (6)–(8), (2) можно представить в виде ряда Фурье вида

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)X_K(X) \quad (32)$$

Лемма 2.3. Для каждого $t \in [0,T]$ справедливы оценки

$$|u_k(t)| \le C_1\left(\varphi_k+\frac{1}{k}\psi_k+\frac{1}{k^3}\left|\widetilde{F_k}(t)\right|\right), \quad (33)$$

$$|u_k''(t)| \le C_3\,(\,k^2\varphi_k+k\psi_k+\frac{1}{k}|\widetilde{F_k}(t)+\frac{|F_k(t)|}{k^2}; \quad (34)$$

здесь и далее C_i— положительные константы, вообще говоря, зависящие от коэффициентов уравнения (1) и число l.

Справедливость оценок (32) и (33) легко следует из формулы (30).

Из ряда (31) с помощью по членные дифференцирования составим ряд

$$u_{tt}=\sum_{k=1} u_k(t)X_k(t), \quad (35)$$

$$u_{xxtt}=\sum_{k=1} u_k(t)X_k(x)=\sum_{k=1}\mu_k^2 u_k(t)X_k(x), \quad (36)$$

$$u_{xxxx}=\sum_{k=1} u_k(t)X_k^{(4)}(x)=\sum_{k=1}\mu_k^4 u_k(t)X_k(x). \quad (37)$$

На основании леммы 3 ряды (31), (34)–(36) мажорируются для любого $(x,t) \in D$ рядом

$$C_3\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^4|\varphi_k|+k^3|\psi_k|+kF_k(t_0)\right), \quad (38)$$

поскольку$|\widetilde{F_k(t)}| \le F_k(t_0)$, где $F_k(t_0)=\max\limits_{0\le t\le T}F_k(t)$ t_0— некоторая точка отрезка $[0;T]$.

Лемма 2.2: Если $\varphi(x) \in C_5[0;l]$, $\varphi^{(i)}(0)=\varphi^{(i)}(l)=0$, $i=0,2,4$; $\psi(x) \in C^4[0;l]$ $\varphi^{(j)}(0)=\varphi^{(j)}(l)=0$ $j=0,2$, $F(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C_x^2(\overline{D})$ и $F(0,t)=F(l,t)=0$, $0 \le t \le T$, тогда представления

$$\varphi_k=\frac{1}{\mu_k^5}\varphi_k^{(5)} \qquad \psi_k=\frac{1}{\mu_k^4}\psi_k^{(4)} \qquad F_k(t)=-\frac{1}{\mu_k^2}F_k^{(2)}(t) \quad (39)$$

где $\varphi_k^{(5)} = \sqrt{\frac{2}{l}\int_0^l \varphi^{(5)}(x)\cos(\mu_k x)\,dx,}$ $\psi_k^{(4)} =$ $\int_0^l \psi^{(4)}(x) X_k(x) dx,$

$F_k^{(2)}(t) = \int_0^l F_{xx}(x,t) X_k(x) dx$

со следующими сходящимися рядами:

$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\varphi_k^{(5)}\right|^2 \le ||\varphi^{(5)}(x)||_{L_{2[0,l]}},$ $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\psi_k^{(4)}\right|^2 \le ||\psi^{(4)}(x)||_{L_{2[0,l]}},$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\varphi_k^{(5)}\right|^2 \le ||F_{xx}(x,t)||_{L_{2[0,l]}}, \qquad 0 \le t \le T. \qquad (40)$$

Доказательство. Вычисляя интегралы в соотношениях (28), (29) и (17) путем интегрирования по частям пятой, четвертой и двукратной соответственно и учитывая условия в основной формуле, получаем представления (38). Неравенства (39) являются неравенствами Бесселя для коэффициентов разложений в ряд Фурье функций $\varphi^{(5)}(x), \psi^{(4)}(x)$ и $F_{xx}(x,t)$ по системе косинусов и синусов на интервал $[0, l]$.

В условиях леммы 2, исходя из представлений (38), ряд (37) оценивается сверху сходящимся рядом

$$C_4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\varphi_k^{(5)}\right| + \left|\psi_k^{(4)}\right| + \left|F_k^{(2)}(t_0)\right|\right).$$

Тогда ряды (31), (34)–(36) сходятся на D равномерно; следовательно, сумма ряда (31) удовлетворяет условиям (6)–(8), (2).

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 3. Если функции $\varphi(x), \psi(x)$ и $F(x,t)$ удовлетворяют условиям леммы 2, то существует единственное решение задачи (6)–(8), (2); это решение может быть представлено суммой ряда (31).

Определение 1. Решение задачи (6)–(8), (2) в классе $C_{x,t}^{4,2}(\overline{D})$ называется классическим, или регулярным, решением этой задачи.

Определение 2. Функция $u(x,t)$ называется обобщенным решением задачи (6)–(8), (2), если существует последовательность $u_n(x,t)$, $n \in N$, регулярных решений задачи (6)–(8), (2) с начальными данными $u_n(x,t) = \varphi_n(x)$ $u_{nt}(x,0)$=$\psi_n(x)$, $0 \leqslant x \leqslant l$, и правыми частями $F_n(x,t), (x,t) \in D$, равномерно сходящейся при $n \to \infty$ к функции $u(x,t)$ на D. Здесь функции $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$, и $F_n(x,t)$, удовлетворяют условиям теоремы 3, и эти последовательности сходятся равномерно на $[0,l]$ и $\overline{D}$, соответственно к функциям $\varphi\,(x), \psi(x)$ и $F(x,t)$, а последовательность $\varphi_n{}'(x)$сходится равномерно на $[0,l]$ к функции $\varphi\,'(x)$.

Теорема 4. Если $\varphi(x) \in C^1[0,l]$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\psi(x) \in C[0,l]$ и $F\,(x,t) \in C(\overline{D})$, то существует единственное и устойчивое обобщенное решение задачи (6)–(8), (2), определяемое суммой ряда (29) и непрерывное на $\overline{D}$.

Доказательство. Пусть функции $\varphi(x), \psi(x)$ и $F\,(x,t)$ удовлетворяют условиям теоремы 4. Тогда существуют последовательности функций $\varphi_n(x)$,$\psi_n(x)$ и $F_n(x,t)$, которые удовлетворяют условиям теоремы 2 и сходятся равномерно на $[0,l]$ и D соответственно к функциям $\varphi(x), \psi(x)$ и $F\,(x,t)$. По функциям $\varphi_n(x)$,$\psi_n(x)$ и $F_n(x,t)$,на основании теоремы 2 строим последовательность $u_n(x,t)$ регулярных решений задачи (6)–(8), (2) В силу линейности исследуемой задачи разность$u_n(x,t) - u_m(x,t)$является решением задачи (6)–(8), (2) с начальными функциями $\varphi_n(x) - \varphi_m(x)$, $\psi_n(x) - \psi_m(x)$ и правая часть $F_n(x,t) - F_m(x,t)$, Тогда в силу оценки (41) для любых $n, m \in N$ имеем

$$\|u_n - u_m\|_{C(\overline{D})} \leq C_6(\|\varphi'_n - \varphi'_m\|_{c(0,l)} + $$
$$+\|\psi_n - \psi_m\|_{c(0,l)} + \|F_n(x,t) - F_n(x,t)\|_{c(0,l)} \qquad (41)$$

В зависимости от выбора последовательностей φ'_n $\psi_n(x)$ и $F_n(x,t)$ они сходятся равномерно на $[0,l]$ и D соответственно к функциям φ'_n $\psi_n(x)$ и $F_n(x,t)$. Следовательно, для них выполняется критерий равномерной сходимости Коши. Поэтому оценка (40) влечет справедливость критерия Коши и для последовательности $u_n(x,t)$.Тогда эта последовательность сходится равномерно на D к единственная функция $u(x,t)$, определяемая рядом (31), удовлетворяющая условиям (2) и непрерывная на D. Из доказательства теоремы 3 следует, что для обобщенного решения задачи (6)–(8), (2) имеет место оценка (40); отсюда следует устойчивость этого решения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ЛИТЕРАТУР

1. Naguleswaran S. Vibration in the two principal planes of a nonuniform beam of rectangular cross-section, one side of which varies as the square root of the axial co-ordinate. Journal of Sound and Vibration. 1994. V. 172, № 3. pp. 305-319.
2. Naguleswaran S. A direct solution for the transverse vibration of Euler-Bernoulli wedge and cone beams. Journal of Sound and Vibration. 1994. V. 172, № 3. pp. 289-304.
3. Naguleswaran S. The vibration of a “complete” Euler-Bernoulli beam of constant depth and breadth proportional to axial coordinate raised to a positive exponents. Journal of Sound and Vibration. 1995. V. 187, № 2. pp.311-327.
4. Vibration modes of centrifugally stiffened beam / A.D. Wright, C.E. Smith, R.W. Thresher [and others]. Journal of Applied Mechanics. 1982. V. 49. pp. 197-202.
5. Chaudhari T.D., Maiti S.K. Modelling of transverse vibration of beam of linearly variable depth with edge crack. Engineering Fracture Mechanics. 1999. V. 63. pp. 425-445.
6. Abrate S. Vibration of non-uniform rods and beams. Journal of Sound and Vibration. 1995. V 185, № 4. pp. 703-716.
7. Klein L. Transverse vibrations of non-uniform beams. Journal of Sound and Vibration. 1974. V. 37. pp. 491-505.
8. Zhou D., Cheung Y.K. The free vibration of a type of tapered beams. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2000. V. 188. pp. 203-216.

9. Grossi R.O., Bhat R.B. A note on vibrating tapered beams. Journal of Sound and Vibration. 1991. pp. 147-174.

10. Auciello N.M. On the transverse vibrations of non-uniform beams with axial loads and elastically restrained ends. International Journal of Mechanical Sciences. 2001. V. 43. pp. 193-208.

11. Krynicki E., Mazurkiewicz Z. Free vibration of a simply supported bar with linearly variable height of cross section. Journal of Applied Mechanics. 1962. V. 29E. pp. 497-501.

12. Sato K. Transverse vibrations of linearly tapered beams with ends restrained elastically against rotation subjected to axial force. International Journal of Mechanical Sciences. 1980. V. 22. pp. 109-115.

13. Rao J.S. The fundamental flexural vibration of a cantilever beam of rectangular cross section with uniform taper. The Aeronautical Quarterly. 1965. V. 16, № 2. pp. 139-144.

14. Carnegie W., Thomas J. Natural frequencies of long tapered cantilevers. The Aeronautical Quarterly. 1967. V. 18. pp. 309 320.