Единственность решения нелокальной задачи по времени для уравнения колебаний балки

Одинаев Рашид Рахимович.

Аннотация: *В данной статье рассматриваются Единственность решения нелокальной задачи по времени для уравнения колебаний балки, посвящен исследованию прямой задачи для колебания однородной балки конечной длины с нелокальными по времени условиями. Получены необходимое и достаточное условия существования решения прямой задачи. Доказана теорема единственности для уравнения колебания однородной балки с нелокальными по времени условиями.*

Ключевые слова: *Единственность решения, нелокальной задачи, свободные колебания, вынужденные колебания, методы анализа, результаты, обсуждение, предложения.*

Рассмотрим балку длиной l, опирающуюся на концы. Под действием внешней силы $G(x,t)$, вынужденные изгибные поперечные колебания балки описываются уравнением четвертого порядка

$$\rho\, S\, u_{tt} + EJu_{xxxx} + Q(t)u = G(x,t),$$

где ρ - плотность балки, S - площадь поперечного сечения балки, E - модуль упругости материала балки, J - момент инерции поперечного сечения относительно горизонтальной оси и по всей длине поддерживается упругим основанием с коэффициентом жесткости $Q(t)$.

Разделив на $\rho\, S$ запишем это уравнение в следующим в виде:

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} + q(t)u = f(x,t), \quad (x,t) \in D, \qquad (1)$$

где $a^2 = EJ/\rho\, S$, $q(t) = Q(t)/\rho\, S$ и $f(x,t) = G(x,t)/\rho\, S$.

Уравнение (1) рассмотрим в прямоугольной области

$$D = \{(x,t), \qquad 0 < x < l, \qquad 0 < t \leq T\}, \qquad D_T := \overline{D},$$

где l - длина балки, T - временной интервал, с нелокальными начальными

$$u(x,0)+\delta_1\,u(x,T)=\varphi(x),\ u_t(x,0)+\delta_2 u_t(x,T)=\psi(x), \qquad (2)$$

$$\varphi(0)=\psi(0)=0, \qquad x\in[0,l],$$

и граничными условиями

$$u(0,t)=u_{xx}(0,t)=u(l,t)=u_{xx}(l,t)=0,\ 0\le\ t\le\ T. \qquad (3)$$

В задаче требуется определить

$$u(x,t)\in\ C\left(\overline{D}\right)\cap\ C^{4,2}_{x,t}(D) \qquad (4)$$

удовлетворяющую равенствам (1)-(3) при положительных числах δ_1, δ_2, и заданных чисел a, l, T и достаточно гладких функций $q(t)$, $f(x,t)$, $\varphi(x)$,

$\psi(x)$.

В уравнение (1) переносим слагаемое $q(t)u(x,t)$ в правую часть уравнение и введем обозначение $F(x,t)=f(x,t)-q(t)u(x,t)$. Таким образом получаем следующее уравнение

$$u_{tt}+a^2u_{xxxx}=F(x,t). \qquad (5)$$

Для решение этого уравнения, воспользуемся методом разделения переменных, представив $u(x,t)=X(x)T(t)$. Рассмотрим решение задачи для случая отсутствия внешней силы $F(x,t)\equiv 0$. Тогда разделяя переменные с учетом условий (4), получим спектральную задачу относительно функций $X(x)$:

$$X^{IV}+\omega\,X(x)=0,\ 0<x<l, \qquad (6)$$

$$X(0)=X(l)=X''(0)=X''(l)=0. \qquad (7)$$

Решая вышеприведенную спектральную задачу, найдем собственные функции

$$X_k(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\,sin\,\mu_k\,x. \qquad (8)$$

соответствующие собственным значениям

$$\omega_k=-\mu_k^4=-\left(\frac{\pi k}{l}\right)^4, \qquad k\in N.$$

Таким образом, построили систему собственных функций задачи (6), (7) по формуле (8). Эта система ортогональна и полна в пространстве $L_2[0,l]$.

Исходя из этого решение задачи (1) - (4) будем искать в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\, sin\mu_k\, x,$$

(9)

$$\mu_k = \frac{\pi k}{l},$$

где

$$u_k(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l u(x,t)\ sin\mu_k\, xdx.$$

(10)

Применяя формальную схему метода Фурье и используя (1)-(2), получим

$$u_k''(t) + \lambda_k^2\, u_k(t) = F_k(t;q,u), \tag{11}$$

$$\lambda_k = a\mu_k^2, \qquad k = 1,2,\dots; \qquad 0 < t \le T,$$

$$u_k(0) + \delta_1 u_k(T) = \varphi_k,\ \ u_k'(0) + \delta_2 u_k'(T) = \psi_k,\ \ k = 1,2,\dots, \tag{12}$$

где

$$F_k(t;q,u) = f_k(t) - q(t)u_k(t), \tag{13}$$

$$f_k(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f(x,t)\, sin\mu_k\, xdx$$

(14)

$$\varphi_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \varphi(x)\, sin\mu_k\, xdx, \qquad \psi_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \psi(x)\, sin\mu_k\, xdx, \qquad k = 1,2,\dots.$$

(15)

Решение задачи (3.6)-(3.7) пишется следующим образом [2.44]:

$$u_k(t) = \frac{1}{\rho_k(T)}\Big(\varphi_k(\cos\lambda_k t + \delta_2\cos\lambda_k(T-t)) + \frac{\psi_k}{\lambda_k}(\sin\lambda_k t - \delta_1\sin\lambda_k(T-t))\Big) + \int_0^T G_k(t,s)F_k(s;q,u)ds \quad (16)$$

где

$$\rho_k(T) = 1 + (\delta_1+\delta_2)\cos\lambda_k T + \delta_1\delta_2, \quad (17)$$

Подставляя выражение (16) в (9), находим $u(x,t)$ классического решения задачи (1)-(4) равной

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\rho_k(T)}\left[\left(\varphi_k(\cos\lambda_k t + \delta_2\cos\lambda_k(T-t)) + \frac{\psi_k}{\lambda_k}(\sin\lambda_k t - \delta_1\sin\lambda_k(T-t))\right) + \int_0^T G_k(t,s)F_k(s;q,u)ds\right]\right\}\sin\mu_k x \quad (18)$$

На основании полноты системы $X_k(x)$ в пространстве $L_2[0,l]$ можно доказать единственность решения задачи (1)-(4). Действительно, пусть существует различные функции $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ - решения данной задачи. Тогда их разность $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ есть решение однородной задачи (1)-(4), где $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$, $F(x,t) \equiv 0$, то $\varphi_n \equiv 0$, $\psi_n \equiv 0$, $F_n(t) \equiv 0$ и из (16) получим $u_k(t) \equiv 0$, что на основании (10) равносильно равенству

$$\int_0^l u(x,t)\sin\mu_k x dx = 0.$$

В силу полноты системы $X_k(x)$ в пространстве $L_2[0,l]$ функция $u(x,t) = 0$ почти всюду в $[0,l]$ и при любом $t \in [0,T]$. Поскольку в силу условия (4), u непрерывна на $\overline{D}$, то $u(x,t) \equiv 0$ на $\overline{D}$. Тем самым, единственность решения задачи (1)-(4) доказана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ЛИТЕРАТУР

1. Caruntu D.I. On bending vibrations of some kinds of beams of variable cross-section using orthogonal polynomials. Revue Roumaine des Sciences Techniques. Serie de Mecanique Appliquee. 1996. V. 41, № 3-4. pp. 265-272.

2. Conway H.D., Dubil J.F. Vibration frequencies of truncated wedge and cone beam. Journal of Applied Mechanics. 1965. V. 32, № 4. pp. 932-935.

3. Goel R.P. Transverse vibration of tapered beams. Journal of Sound and Vibration. 1976. V. 47, № 1. pp. 1-7.

4. Sanger D.J. Transverse vibration of a class of non-uniform beams. Journal of Mechanical Engineering Science. 1968. V. 16. pp. 111-120.

5. Mabie J.J., Rogers C.B. Traverse vibrations of tapered cantilever beams with end support. Journal of Acoustical Society of America. 1968. V. 44. pp. 1739-1741.

6. Conway H.D., Becker E.C.H., Dubil J.F. Vibration frequencies of tapered bars and circular plates. Journal of Applied Mechanics. 1964. T. June. pp. 329-331.

7. Rosa M.A. De, Auciello N.M. Free vibrations of tapered beams with flexible ends. Computers & Structures. 1996. V. 60, № 2. pp. 197-202.

8. Craver Jr. W.L., Jampala P. Transverse vibrations of a linearly tapered cantilever beam with constraining springs. Journal of Sound and Vibration. 1993. V. 166, № 3. pp. 521-529.

9. Cranch E.T., Adler A. Bending vibrations of variable section beams. American Society of Mechanical Engineers. 1956. V. 23, № 1. pp. 103-108.

10. Auciello N.M., Ercolano A. Exact solution for the transverse vibration of a beam a part of which is a taper beam and other part is a uniform beam. International Journal of Solids and Structures. 1997. pp. 2115-2129.

11. Wang H.C. Generalized hypergeometric function solutions on the transverse vibrations of a class of non-uniform beams. Journal of Applied Mechanics. 1967. V. 34E. pp. 702-708.

12. Storti D., Aboelnaga Y. Bending vibrations of a class of rotating beams with hypergeometric solutions. Journal of Applied Mechanics. 1987. V. 54. pp. 311-314.