Единственность решения начально-граничной задачи для уравнения колебания балки с коэффициентом жесткости при младшем члене

Одинаев Рашид Рахимович.

Аннотация: *В данной статье рассматриваются «Единственность решения начально-граничной задачи для уравнения колебания балки с коэффициентом жесткости при младшем члене», рассматривается начально-краевая задача о поперечных колебаниях балки конечной длины с коэффициентом жесткости (постели) при младшем члене и доказывается теорема единственности для этой задачи. Для доказательства единственности решения воспользуется энергетическом неравенством.*

Ключевые слова: *Единственность решения, начально-граничной задачи, свободные колебания, вынужденные колебания, методы анализа, результаты, обсуждение, заключение, предложения.*

В данном параграфе рассматривается начально-краевая задача о поперечных колебаниях балки конечной длины и доказывается теорема единственности для этой задачи

Рассмотрим уравнение неоднородного колебания балки

$$\rho\, S\, u_{tt} + EJu_{xxxx} + \Lambda(x)u = \Gamma(x,t) \qquad (1)$$

где ρ - линейная плотность балки, S - площадь поперечного сечения, E - модуль упругости материала, J - момент инерции сечения относительно своей горизонтальной оси, $\Lambda(x)$ - коэффициент жесткости основания (коэффициент постели), $\Gamma(x,t)$ - внешняя сила.

Это уравнение можно записать в виде:

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} + L(x)u = G(x,t), \qquad (2)$$

где $a^2 = \frac{EJ}{\rho}S$, $L(x) = \frac{\Lambda(x)}{\rho}S$ и $G(x,t) = \frac{\Gamma(x,t)}{\rho}S$ и

$$u(x,t) \in C^{4,2}_{x,t}(\overline{D}). \qquad (3)$$

Уравнение (2) рассматривается в области

$$D = \{(x,t): \quad 0 < x < l, \qquad 0 < t < T\}$$

где l - длина балки, T - временной интервал, с начальными

$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ x \in [0,l]$ (4)

и граничными условиями

$$u(0,t) = u_x(0,t) = 0, \quad (\text{заделка}),$$

$u_{xx}(l,t) = u_{xxx}(l,t) = 0$, (свободный конец) $0 \le t \le T$. (5)

В задаче требуется определить функцию $u(x,t) \in C^{4,2}_{x,t}(D)$, удовлетворяющую равенствам (2)-(5), при заданных чисел a, l, T и достаточно гладких функций $L(x)$, $G(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$.

В уравнении (2) переноса слагаемое $L(x)u$ в правую часть введем обозначение $F(x,t) = G(x,t) - L(x)u$. Тогда получим:

$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = F(x,t)$ (6)

Для решения уравнения (6) с начальными (4) и граничными условиями (5) используем метод разделения переменных, представив $u(x,t) = X(x)T(t)$ и получаем спектральную задачу относительно $X(x)$. Эта задача полностью исследована в работе. Приведем необходимые сведения из этой работы. Найдены

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)Y_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)Y_n(x).$$

$\lambda\_n = -d_n^4$ - собственные значения спектральной задачи, где

$$d_n = \frac{\pi}{l}\left(n - \frac{1}{2} + (-1)^n \Theta_n\right), \qquad \Theta_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$X_n(x) = \begin{cases} a_n ch\, d_n \left(x - \frac{l}{2}\right) + b_n \sin d_n \left(x - \frac{l}{2}\right), & n = 2k-1, \\ c_n sh\, d_n \left(x - \frac{l}{2}\right) + f_n \cos d_n \left(x - \frac{l}{2}\right), & n = 2k, \end{cases}$$

(7)

- система собственных функций, где

$$a_n = sh^{-1}\left(\frac{d_n l}{2}\right), \qquad b_n = cos^{-1}\left(\frac{d_n l}{2}\right),$$

$$c_n = -ch^{-1}\left(\frac{d_n l}{2}\right), \qquad f_n = \sin^{-1}\left(\frac{d_n l}{2}\right).$$

Нормирую эту систему функций (7), получаем

$$Y_n(x) = \frac{X(x)}{||X(x)||}, \qquad ||X(x)|| = \begin{cases} \sqrt{l}\, cth\left(\frac{d_n l}{2}\right), & n = 2k-1, \\ \sqrt{l}\, th\left(\frac{d_n l}{2}\right), & n = 2k, \end{cases}$$

(8)

Заметим, что система (8) ортонормирована и полна в пространстве $L_2[0, l]$ и образует в нем ортонормированный базис.

Решение поставленной задачи (2)-(5) будем искать в виде суммы рядов:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) Y_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) Y_n(x).$$

где

$$u_n(t) = \varphi_n cos\, ad_n^2\, t + \frac{\psi_n}{ad_n^2} sin\, ad_n^2\, t,$$

здесь

$$\varphi_n = \int_0^l \varphi(x) Y_n(x) dx, \qquad \psi_n = \int_0^l \psi(x) Y_n(x) ds,$$

$$v_n(t) = \frac{1}{ad_n^2} \int_0^l F_n(s) \sin ad_n^2\, (t-s) ds,$$

и

$$F_n(t) = \int_0^l F(x,t) Y_n(x) dx.$$

а $Y_n(x)$ определяется по формуле (8).

Для доказательства единственности решения поставленной задачи воспользуемся следующим утверждением из работы .

Теорема 1. Если существует решение начально-граничной задачи (2)-(5), то для любого $t \in [0, T]$ справлива следующая оценка

$$\int_0^l (u_t^2 + a^2 u_{xx}^2 + Lu^2)dx \le e^T \left[\int_0^l \left(\psi^2(x) + a^2\varphi''^2(x) + L(x)\varphi^2(x)\right)dx + \iint_D G^2(x,t)dxdt \right].$$

(9)

где функция $L(x) \ge 0$, $x \in [0, l]$.

Обратим внимание, что имеет место соотношение

$$E_0(t) = \frac{1}{2}\int_0^l (\rho S u_t^2 + EJ u_{xx}^2 + \Lambda(x)u^2)dx = \frac{1}{2\rho S}\int_0^l [u_t^2 + a^2 u_{xx}^2 + Lu^2]dx = \frac{1}{\rho S}E(t).$$

Доказательство. Рассмотрим тождество

$$u_t L^* u = \frac{1}{2}(u_t^2 + a^2 u_{xx}^2 + L(x)u^2)'_t + a^2(u_t u_{xxx} - u_{tx}u_{xx})'_x.$$

Интегрирую по области

$$D_\tau = D \cap \{t < \tau\}, \quad 0 < \tau \le T,$$

и с учетом формулы Грина получим соотношение

$$E(\tau) - E(0) + a^2 \int_0^l (u_t\, u_{xxx} - u_{xt}u_{xx})|_{x=l}dt - a^2 \int_0^l (u_t\, u_{xxx} - u_{xt}u_{xx})|_{x=0}dt = \iint_{D_\tau} u_t G(x,t)dxdt\,.$$

Это соотношение вместе с граничными условиями (5) означает, что

$E(\tau) = E(0) + \iint_{D_\tau} u_t G(x,t)dxdt.$ (10)

В силу известного неравенство $2ab \le a^2 + b^2$, соотношение (10) перепишется в следующем виде:

$$E(\tau) \le E(0) + \frac{1}{2}\iint\limits_{D_\tau} G^2 dxdt + \frac{1}{2}\iint\limits_{D_\tau} u_t^2 dxdt = A + \frac{1}{2}\int_0^\tau dt \int_0^l u_t^2 dx$$

$$\le A + \frac{1}{2}\int_0^\tau dt \int_0^l (u_t^2 + a^2 u_{xx}^2 + L(x)u^2)dx = A + \int_0^\tau E(t)dt.$$

Таким образом, для любого $\tau \in [0,T]$ приходим к интегральному неравенству

$E(\tau) \le A + \int_0^\tau E(t)dt.$ (11)

Умножаем последнее неравенство на $e^{-\tau}$ и приводим к виду

$$\frac{d}{d\tau}\left[e^{-\tau}\int_0^\tau E(t)dt\right] \le A\, e^{-\tau}.$$

Интегрирую последнее неравенство по τ от 0 до T, получаем

$$A + \int_0^T E(t)dt \le Ae^T.$$

Отсюда вместе с неравенством (11) следует оценка (9).

Следующие утверждения следуют из оценки (9).

Следствие 1. Если в условиях теоремы 1 правая часть уравнения (1) равна нулю, т.е. $G(x,t) \equiv 0$, то соотношение

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2}\int_0^l [\psi^2(x) + a^2\varphi''^2(x) + L(x)\varphi^2(x)]dx$$

(12)

справедливо для любого $t \in [0,T]$, т.е. из соотношения (12) следует, что полная энергия свободных колебаний однородной балки остается постоянной и равной его начальной энергии на протяжении всего процесса колебаний.

Справедливость отношения (12) непосредственно следует из отношения (9).

Следствие 2 (теорема единственности). Если существует функция $u(x,t)$, удовлетворяющая условиям (2)-(3) и граничным условиям (5), то она единственна.

Доказательство. Предположим, что существуют две функции $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, удовлетворяющие условиям теоремы 3.1. Тогда их разница

$$u_1(x,t) - u_2(x,t) = u(x,t)$$

принадлежит классу (3) и удовлетворяет однородному уравнению $L^*u = 0$ в D, нулевым начальным $u(x,0) = u_t(x,0) \equiv 0$ и граничным условиям (5). Для такого решения из (12) имеем

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l (u_t^2 + a^2 u_{xx}^2 + L(x)u^2)dx \equiv 0.$$

Если $L(x) > 0$, то последнее тождество возможно тогда и только тогда, когда $u_t(x,0) \equiv 0$, $u_{xx} \equiv 0$ и $u = 0$ в D. Если $L(x) = 0$, то $u(x,t) = c_1 x + c_2$, где c_1 и c_2 - положительные постоянные. Так как функция $u(x,t)$ удовлетворяет граничными условиям (5), то $c_1 = c_2 = 0$. Следовательно, $u(x,t) \equiv 0$ в D.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ЛИТЕРАТУР

1. Free vibration behavior of exponential functionally graded beams with varying cross-section / A.A Haasen, T. Abdelouahed, A.M. Sid [and others.]. Journal of Vibration and Control. 2011. V. 17, № 2. pp. 311-318.

2. Lardner T.J. Vibration of beams with exponentially varying properties. Acta Mechanica. 1968. V. 6, № 2-3. pp. 197-202.

3. Suppiger E., Taleb N. Free lateral vibration of beams of variable cross section. Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP). 1956. V.7, № 8. pp. 501-520.

4. Caruntu D.I. Dynamic modal characteristics of transverse vibrations of cantilevers of parabolic thickness. Mechanics Research Communications. 2009. V. 36. pp. 391-404.

5. Prudnikov, A.P., Brychkov, Yu.A., and Marichev, O.I., Integraly i ryady (Integrals and Series), Moscow: Nauka, 1981.

6. Sabitov, K.B., Uravneniya matematicheskoi fiziki (Equations of Mathematical Physics), Moscow: Fizmatlit, 2013.

7. Дурдиев У., Одинаев Р. Нелокальная обратная задача по времени для уравнения колебаний балки. Самаркандский государственный университет имени Ш.Рашидова и Институт Математики имен В.И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан, Международная конференция «MATHEMATICAL ANALYSIS AND ITS APPLICATIONS IN MODERN MATHEMATICAL PHYSICS», 23-24 сентября 2022 г.; Самарканд, Узбекистан.

8. Megraliev Ya.T., Azizbayov E.I. A time-nonlocal inverse problem for a hyperbolic equation with an integral overdetermination condition. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 2021. N. 28. P.1–12.

9. Дурдиев У.Д., Одинаев Р.Р. Обратная задача нахождения коэффициента жесткости в уравнении вынужденных колебаний балки. Узбекско-Малайзийская международная научно-практическая конференция «COMPUTATIONAL MODELS AND TECHNOLOGIES», 16-17 сентября 2022 года; Ташкент, Узбекистан.

10. Sabitov K.B., Fadeeva O.V. Initial-boundary value problem for the equation of forced vibrations of a cantilever beam, Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math.Sci.] 25 (1), 51–66 (2021), DOI: 10.14498/vsgtu1845.

11. Sabitov K.B., A remark on the theory of initial-boundary value problems for the equation of rods and beams, Differ. Equation 53 (1), 86–98 (2017), DOI : 10.1134/S0012266117010086.